



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

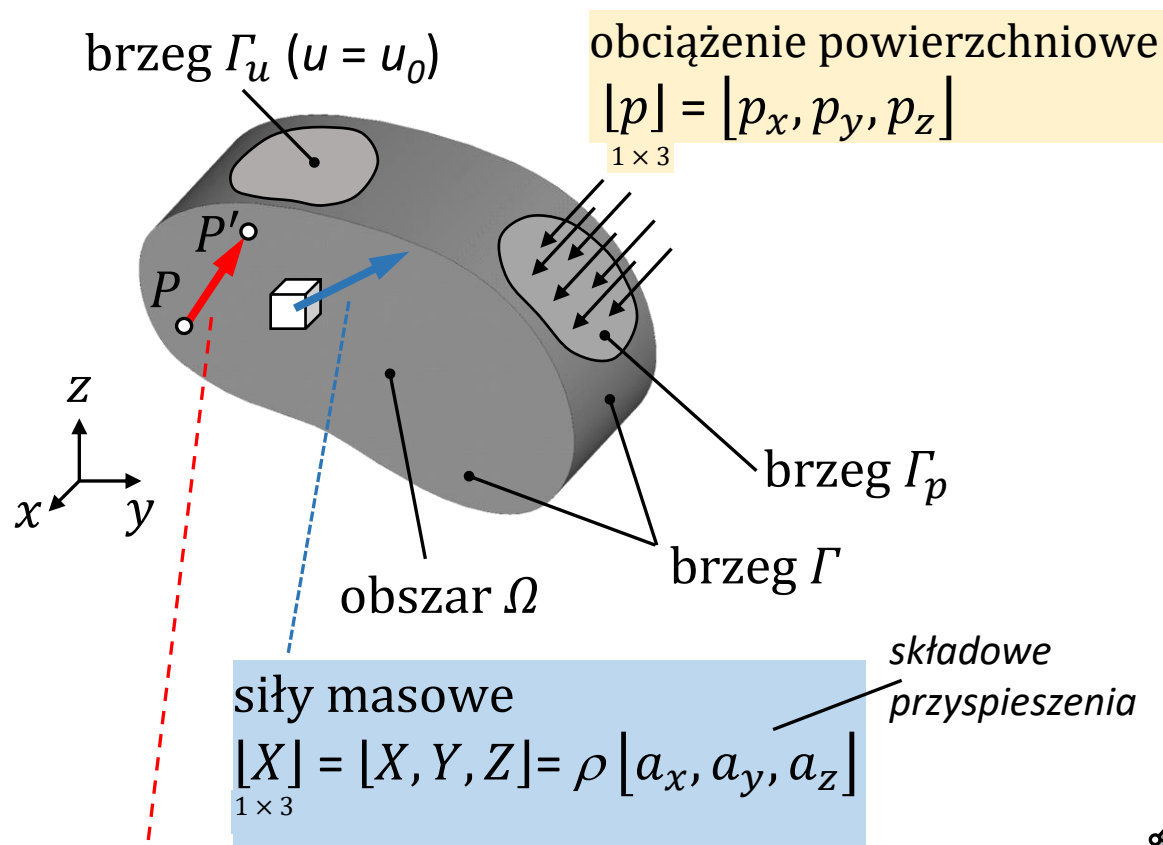


# Metoda elementów skończonych (MES1)

Wykład 2A. Zagadnienie brzegowe mechaniki ciała stałego  
w ujęciu MES

02.2024

# Zagadnienie brzegowe mechaniki ciała stałego

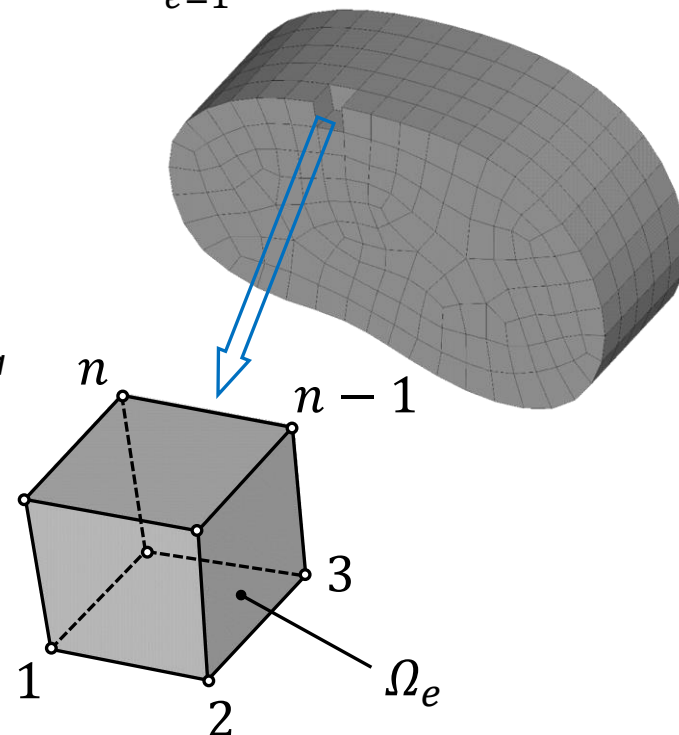


## Model MES

$NOE$  – l. elementów

$NON$  – l. węzłów

$$\Omega = \sum_{e=1}^{NOE} \Omega_e \text{ and } \Omega_i \cap \Omega_j = 0 \text{ for } i \neq j$$



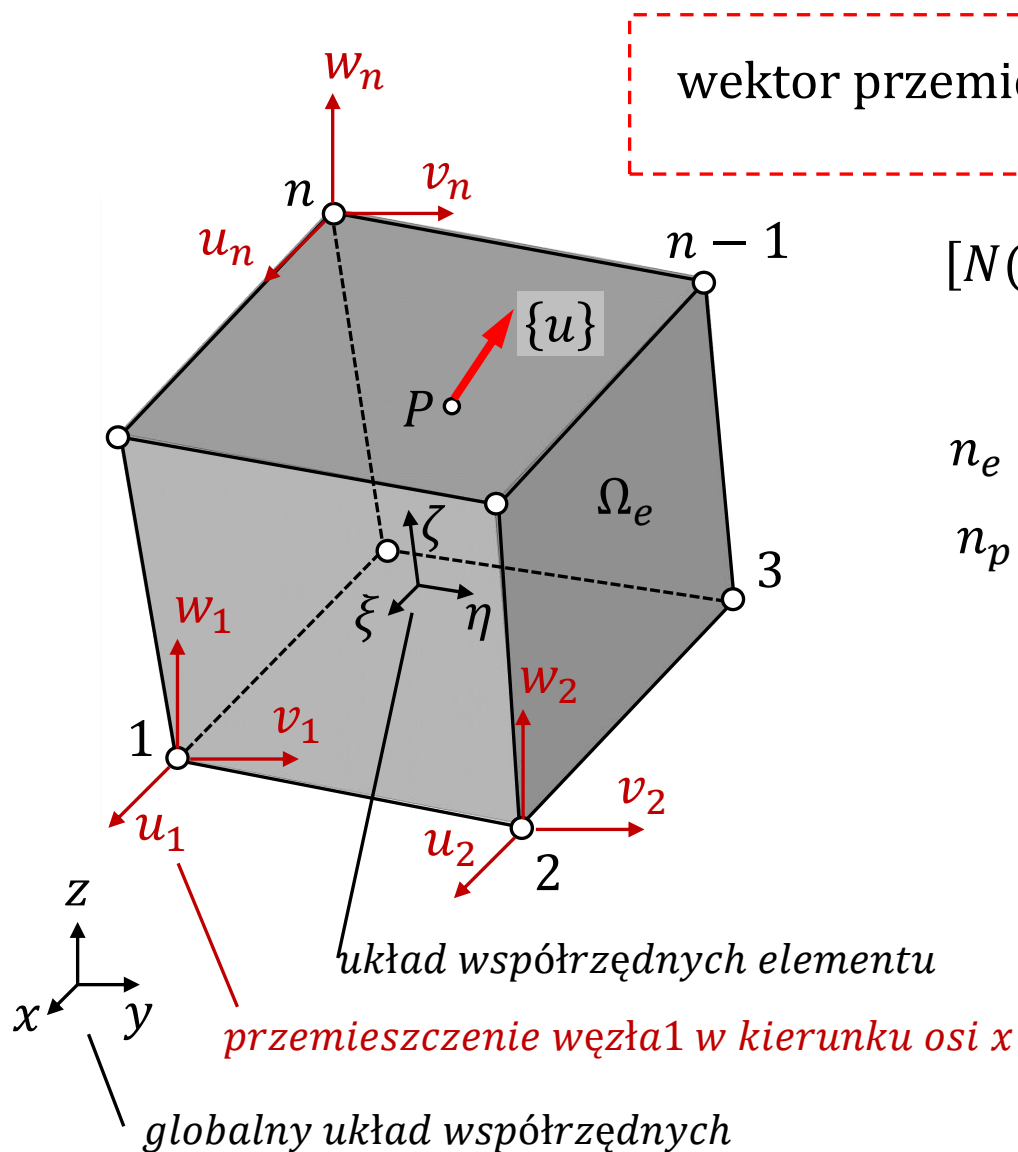
### POSZUKIWANA FUNKCJA

wektor prze-  
– mieszczenia

$$\{u\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

Element skończony o  $n$  - węzłach

# Aproksymacja wewnątrz elementu skończonego o $n$ - węzłach



$$\text{wektor przemieszczenia } \{u\} = [N(\xi, \eta, \zeta)] \{q\}_e$$

$3 \times 1$ 
 $3 \times n_e$ 
 $n_e \times 1$

$[N(\xi, \eta, \zeta)]$  – macierz funkcji kształtu

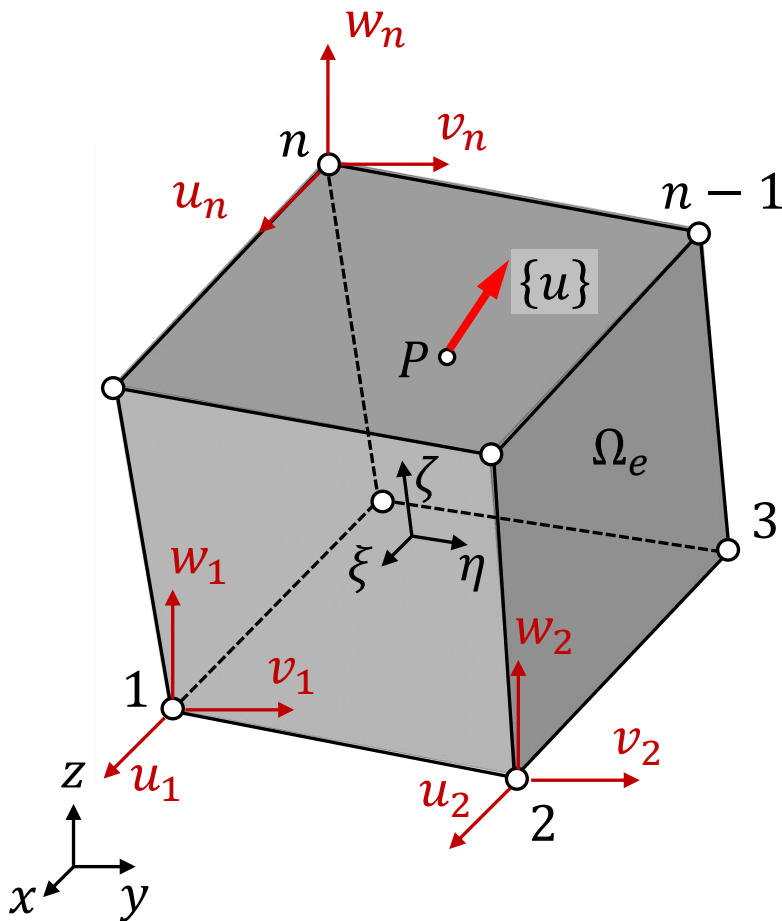
$$n_e = n \cdot n_p$$

$n_e$  – l. stopni swobody elementu skończ.

$n_p$  – l. stopni swobody w węźle

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix}_e \quad \text{– lokalny wektor parametrów węzłowych}$$

# Macierz funkcji kształtu elementu



Aproksymacja węzłowa:

$$\{u\} = [N(\xi, \eta, \zeta)] \{q\}_e$$

$3 \times 1$ 
 $3 \times n_e$ 
 $n_e \times 1$

$$u = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + \dots + N_n \cdot u_n$$

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + \dots + N_n \cdot v_n$$

$$w = N_1 \cdot w_1 + N_2 \cdot w_2 + \dots + N_n \cdot w_n$$

lokalny wektor  
parametrów  
węzłowych:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix}_e$$

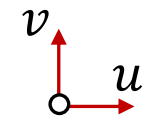
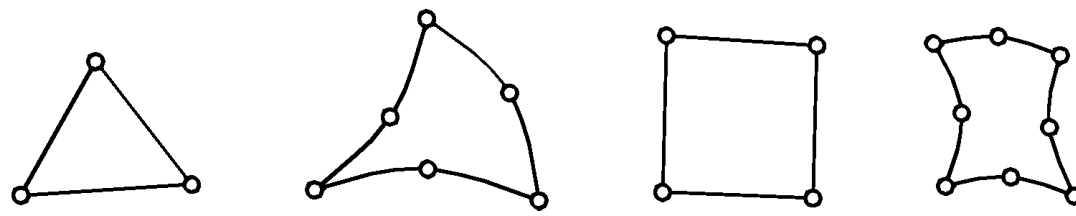
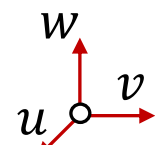
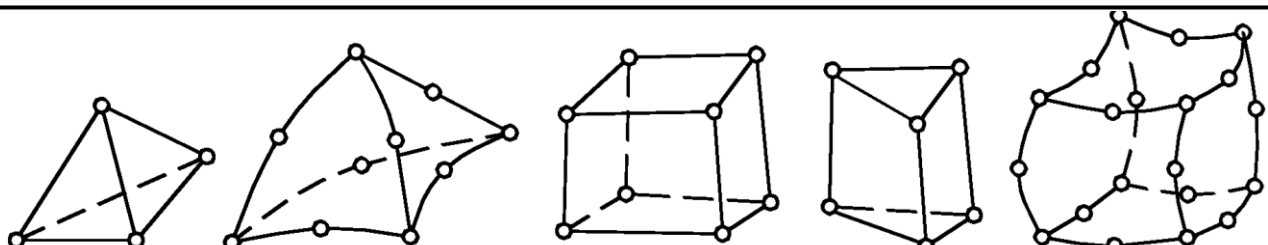
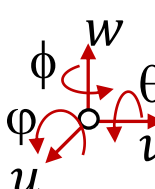
$n_e \times 1$

macierz  
funkcji  
kształtu:

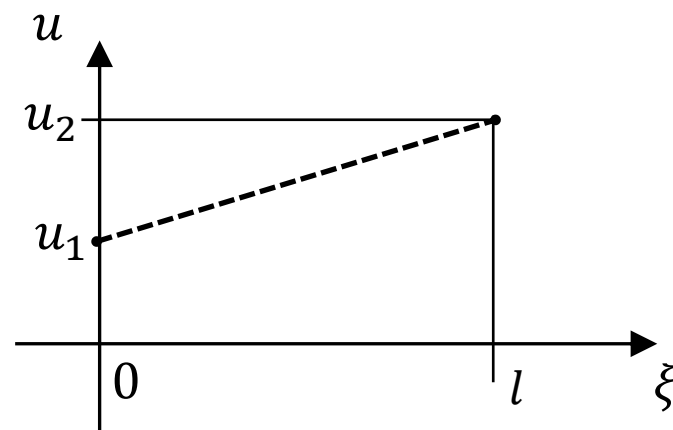
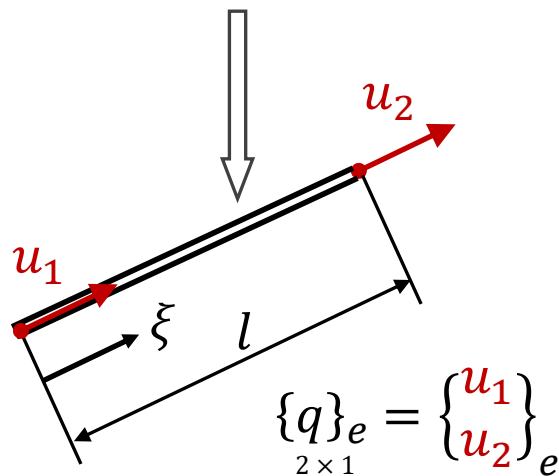
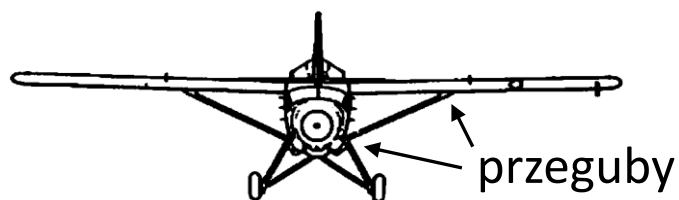
$$[N(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

$3 \times n_e$

# Przykłady elementów skończonych

| Typ                                                                                          | $n_e$ – liczba stopni swobody w elemencie skończonym                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| pręty                                                                                        | <br>2, 4, 6                      6                                                                      |
| 2D<br>      | <br>6                      12                      8                      16                            |
| 3D<br>     | <br>12                      30                      24                      18                      60 |
| shell<br> | <br>24                      48                                                                        |

# Przykład: funkcje kształtu dla elementu skończonego reprezentującego zastrzał



funkcje liniowe:

$$u(\xi) = \frac{u_2 - u_1}{l} \xi + u_1$$

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \frac{u_2 - u_1}{l} \xi + u_1 = \frac{u_2}{l} \xi - \frac{u_1}{l} \xi + u_1 = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) u_1 + \frac{\xi}{l} u_2 = \\ &= N_1(\xi) \cdot u_1 + N_2(\xi) \cdot u_2 = [N_1, N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e = [N(\xi)] \{q\}_e \end{aligned}$$

$\begin{matrix} 1 \times 2 & 2 \times 1 \end{matrix}$

funkcje kształtu:

$$N_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l}$$

;

$$N_2(\xi) = \frac{\xi}{l}$$

# Składowe stanu odkształcenia

odkształcenia normalne:

$$\varepsilon_x = \frac{(A'B')_x - AB}{AB} = \frac{(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

odkształcenia postaciowe:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma_1 \cong \tan \gamma_1 = \frac{(A'D')_x}{(A'D')_y} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \varepsilon_y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

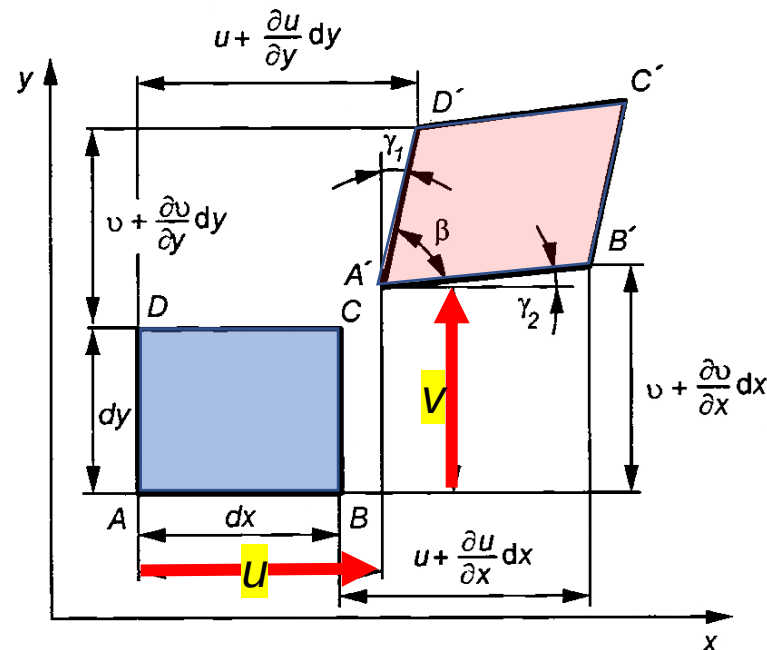
$$\gamma_2 \cong \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

*małe odkształcenia:  $\varepsilon_y \ll 1$*

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$



# Tensor odkształcenia. Wektor składowych odkształcenia

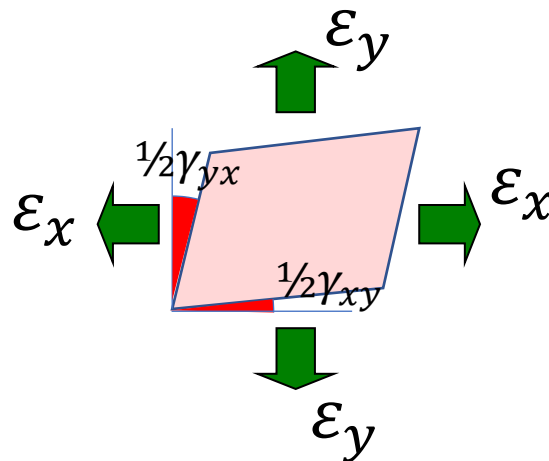
tensor odkształcenia:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

wektor składowych odkształcenia:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [R] \{u\} \quad ; \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = [u][R]^T$$

$\begin{matrix} 6 \times 3 & 3 \times 1 \\ \uparrow \\ \text{macierz gradientu} \end{matrix}$



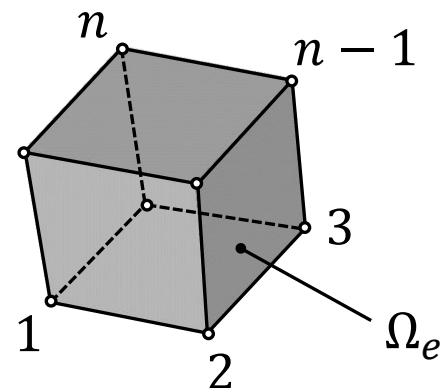


# Macierz odkształcenie-przemieszczenie elementu skończonego

Aproksymacja węzłowa w elemencie skończonym:

$$\{u\} = [N(\xi, \eta, \zeta)]\{q\}_e$$

$3 \times 1$                    $3 \times n_e$                    $n_e \times 1$



wektor składowych odkształcenia w elemencie skończonym:

$$\{\varepsilon\} = [R]\{u\} = [R][N]\{q\}_e = [B]\{q\}_e$$

$6 \times 1$      $6 \times 3$   $3 \times 1$      $6 \times 3$   $3 \times n_e$   $n_e \times 1$      $6 \times n_e$   $n_e \times 1$

$$[\varepsilon] = [q]_e [B]^T$$

$1 \times 6$      $1 \times n_e$   $n_e \times 6$

$$[B] = [R][N] \text{ — macierz odkształcenie-przemieszczenie}$$

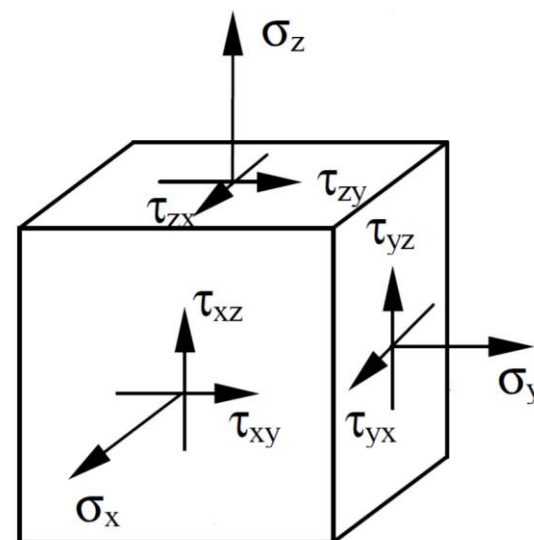
$6 \times n_e$      $6 \times 3$   $3 \times n_e$

# Składowe naprężenia

naprężenia normalne:  $\sigma_x$  ;  $\sigma_y$  ;  $\sigma_z$

wartość dodatnia - rozciąganie, wartość ujemna - ściskanie

składowe tnące:  $\tau_{xy}$  ;  $\tau_{yz}$  ;  $\tau_{zx}$  ;  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$



naprężenie zredukowane:

*Naprężenia Hubera – Misesa:*

$$\sigma_{EQV} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Naprężenia Treski:  $\sigma_{INT} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{max}$

najmniejsze  
naprężenie główne

najmniejsze  
naprężenie główne

maksymalne  
naprężenie styczne

# Tensor naprężenia. Wektor składowych naprężenia

Tensor naprężenia:

$$\underset{3 \times 3}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

*w układzie  $x, y, z$*

*w kierunkach głównych*

wektor składowych naprężenia:

$$\underset{6 \times 1}{\{\sigma\}} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

# Macierz konstytutywna

materiał liniowy izotropowy (prawo Hooke'a):

$$\begin{matrix} \{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \\ 6 \times 1 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1 \end{matrix}$$



macierz konstytutywna:

$$[D]_{6 \times 6} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}$$

$E$  – moduł Younga

$\nu$  – stała Poissona

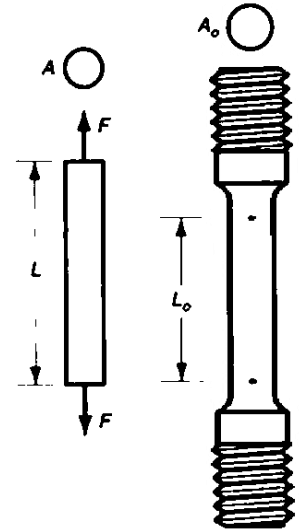
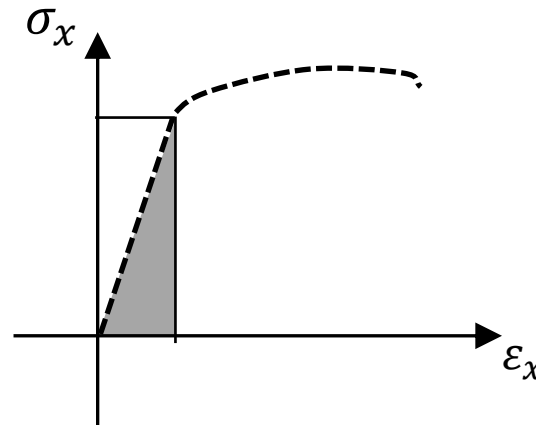
## Przykład: próba rozciągania

$$\sigma_x = \frac{F}{A_0} \quad ; \quad \varepsilon_x = \frac{L-L_0}{L_0} \quad ; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_T$$

energia odksz. spr.:  $U = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x A_0 L_0$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$6 \times 1 \quad \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

z 2 r-nia:  $0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu \varepsilon_x + (1-\nu) \varepsilon_T + \nu \varepsilon_T) \rightarrow \boxed{\varepsilon_T = -\nu \varepsilon_x}$

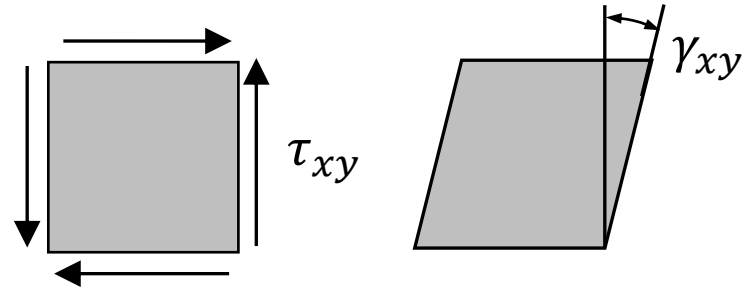
z 1 r-nia:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu) \varepsilon_x + \nu \varepsilon_T + \nu \varepsilon_T) = \frac{E}{(1-\nu-2\nu^2)} ((1-\nu) \varepsilon_x - \nu^2 \varepsilon_x - \nu^2 \varepsilon_x) \rightarrow \boxed{\sigma_x = E \varepsilon_x}$$

## Przykład: czyste ścinanie

$$\tau_{xy} \ ; \ \gamma_{xy}$$

$$\underbrace{\{\sigma\}}_{6 \times 1} = \underbrace{[D]}_{6 \times 6} \underbrace{\{\varepsilon\}}_{6 \times 1}$$



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

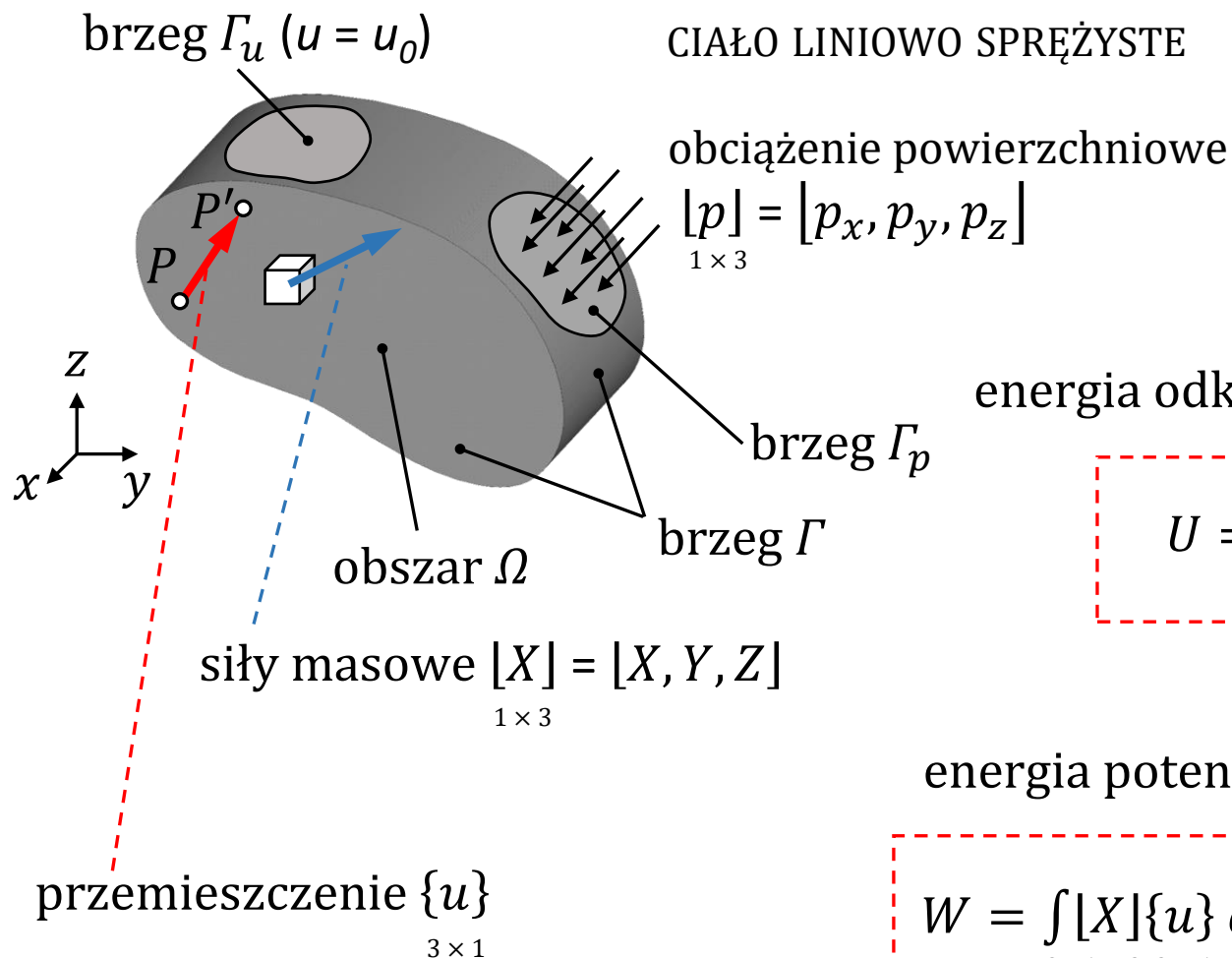
z 4 r-nia :

$$\tau_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (0.5 - \nu) \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)(0.5-\nu)} (0.5 - \nu) \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \rightarrow$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} - \text{moduł Kirchhoff'a}$$

# Energia odkształcenia sprężystego. Energia potencjalna obciążenia



energia odkształcenia sprężystego:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon] \{\sigma\} d\Omega$$

$\Omega \quad 1 \times 6 \quad 6 \times 1$

energia potencjalna obciążenia:

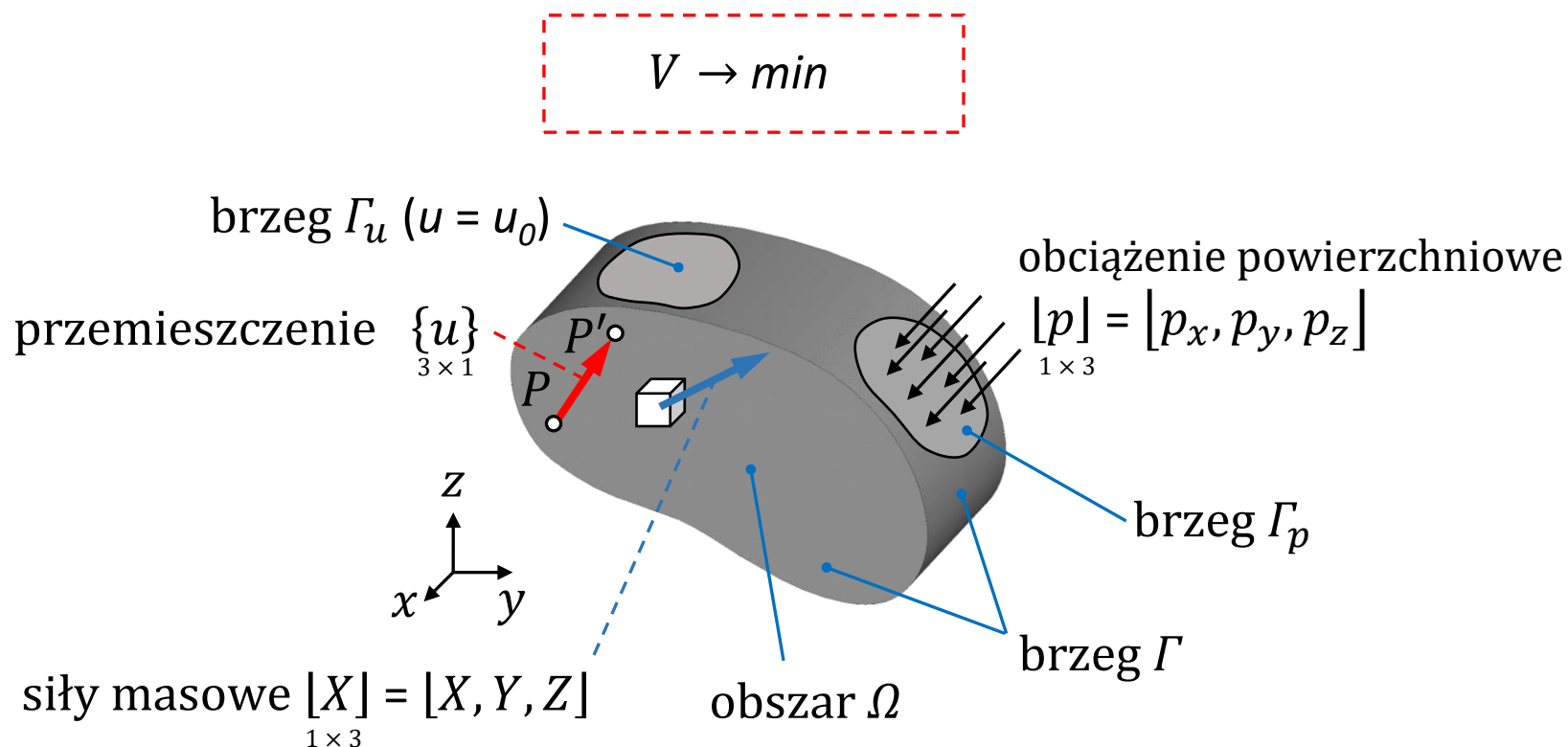
$$W = \int_{\Omega} [X] \{u\} d\Omega + \int_{\Gamma_p} [p] \{u\} d\Gamma_p$$

$\Omega \quad 1 \times 3 \quad 3 \times 1 \qquad \Gamma_p \quad 1 \times 3 \quad 3 \times 1$

# Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej

całkowita energia potencjalna:  $V = U - W$

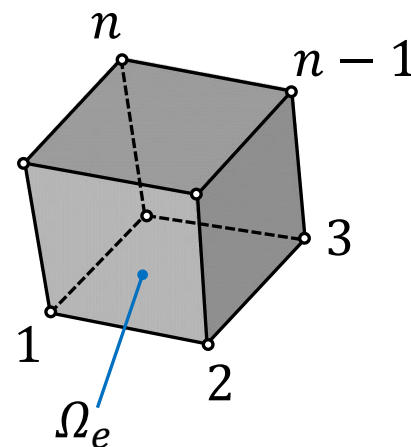
Pole przemieszczeń  $\{u\}$  będące rozwiązaniem zadania spełnia warunek przemieszczenia na brzegu  $\Gamma_u$  i minimalizuje całkowitą energię potencjalną  $V$ .





# Energia sprężysta elementu. Lokalna macierz sztywności

$\{q\}_e$  - lokalny wektor parametrów węzłowych  
 $n_e \times 1$



energia sprężysta elementu:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [\varepsilon] \{\sigma\} d\Omega_e = \frac{1}{2} [q]_e \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega_e \{q\}_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e$$

$1 \times 6 \quad 6 \times 1 \quad 1 \times n_e \quad \Omega_e \quad n_e \times 6 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times n_e \quad n_e \times 1 \quad 1 \times n_e \quad n_e \times n_e \quad n_e \times 1$

$$[\varepsilon] = [q]_e [B]^T \quad \{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad \{\varepsilon\} = [B] \{q\}_e$$

$1 \times 6 \quad 1 \times n_e \quad n_e \times 6 \quad 6 \times 1 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1 \quad 6 \times 1 \quad 6 \times n_e \quad n_e \times 1$

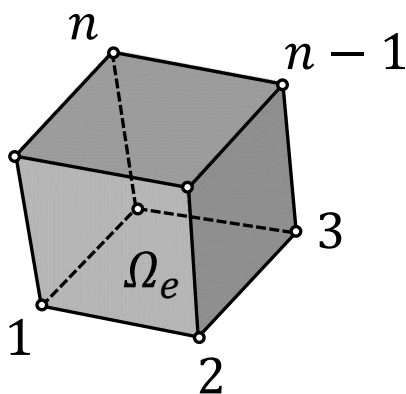
lokalna macierz sztywności:

$$[k]_e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega_e$$

$n_e \times n_e \quad \Omega_e \quad n_e \times 6 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times n_e$

# Energia sprężysta elementu

notacja lokalna:



$n$  – liczba węzłów w el.

$n_p$  – liczba param. węzłowych w węźle.

liczba parametrów węzłowych w el.:

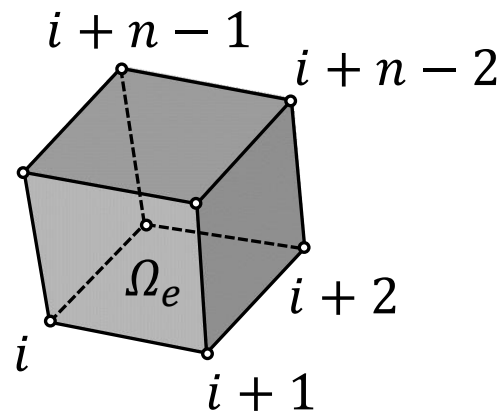
$$n_e = n \cdot n_p$$

$\{q\}_e$  - lokalny wektor param. węzłowych  
 $n_e \times 1$

$$U_e = \frac{1}{2} \underset{1 \times n_e}{[q]_e} \underset{n_e \times n_e}{[k]_e} \underset{n_e \times 1}{\{q\}_e}$$

↑  
lokalna macierz sztywności

notacja globalna:



$NON$  – liczba węzłów

$n_p$  – liczba param. w węźle

liczba stopni swobody elementu:

$$NDOF = NON \cdot n_p$$

$\{q\}$  - globalny wektor param. węzłowych  
 $NDOF \times 1$

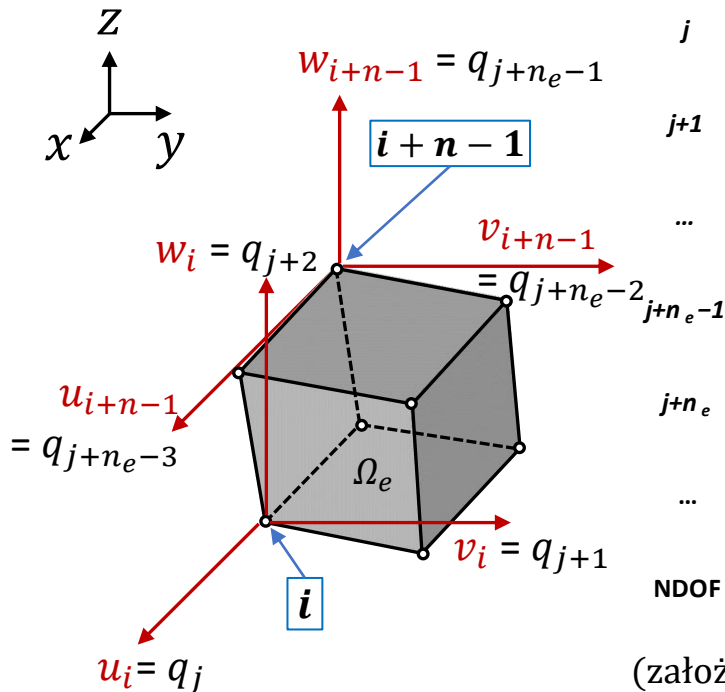
$$U_e = \frac{1}{2} \underset{1 \times NDOF}{[q]} \underset{NDOF \times NDOF}{[k]_e^*} \underset{NDOF \times 1}{\{q\}}$$

↑  
rozszerzona macierz sztywności elem.

# Rozszerzona lokalna macierz sztywności elementu

$$\{q\}_{NDOF \times 1} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_{NDOF} \end{Bmatrix}$$

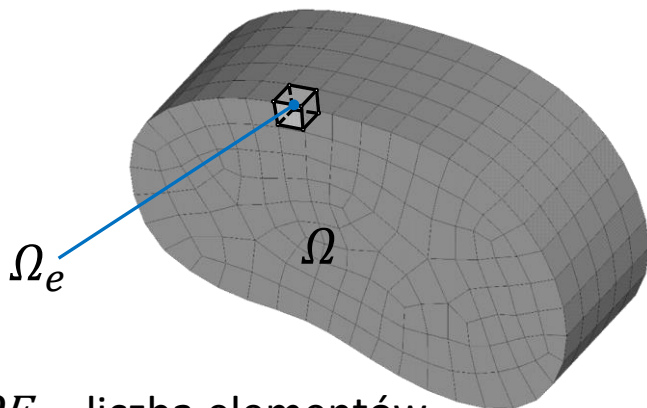
$$[k]_e^* =$$



|           | 1   | 2   | ... | $j-1$ | $j$        | $j+1$      | ... | $j+n_e-1$    | $j+n_e$ | ... | NDOF |
|-----------|-----|-----|-----|-------|------------|------------|-----|--------------|---------|-----|------|
| 1         | 0   | 0   | ... | 0     | 0          | 0          | ... | 0            | 0       | ... | 0    |
| 2         | 0   | 0   | ... | 0     | 0          | 0          | ... | 0            | 0       | ... | 0    |
| ...       | ... | ... | ... | 0     | 0          | 0          | ... | 0            | 0       | ... | 0    |
| $j-1$     | 0   | 0   | 0   | 0     | 0          | 0          | ... | 0            | 0       | ... | 0    |
| $j$       | 0   | 0   | 0   | 0     | $k_{11}$   | $k_{12}$   | ... | $k_{1n_e}$   | 0       | ... | 0    |
| $j+1$     | 0   | 0   | 0   | 0     | $k_{21}$   | $k_{22}$   | ... | $k_{2n_e}$   | 0       | ... | 0    |
| ...       | ... | ... | ... | ...   | ...        | ...        | ... | ...          | 0       | ... | 0    |
| $j+n_e-1$ | 0   | 0   | 0   | 0     | $k_{n_e1}$ | $k_{n_e2}$ | ... | $k_{n_en_e}$ | 0       | ... | 0    |
| $j+n_e$   | 0   | 0   | 0   | 0     | 0          | 0          | 0   | 0            | 0       | ... | 0    |
| ...       | ... | ... | ... | ...   | ...        | ...        | ... | ...          | ...     | ... | 0    |
| NDOF      | 0   | 0   | 0   | 0     | 0          | 0          | 0   | 0            | 0       | 0   | 0    |

(założono, że numery węzłów w elemencie kolejno następują po sobie)

# Energia sprężysta w modelu MES. Globalna macierz sztywności



$$\Omega = \sum_{e=1}^{NOE} \Omega_e \rightarrow$$

$$U = \sum_{e=1}^{NOE} U_e$$

$NOE$  – liczba elementów

$NDOF$  – liczba stopni swobody

$\{q\}$  - globalny wektor param. węzłowych  
 $NDOF \times 1$

energia sprężysta w modelu MES:

$$U = \sum_{e=1}^{NOE} U_e = \sum_{e=1}^{NOE} \frac{1}{2} \cdot [q] \cdot [k]_e^* \cdot \{q\} = \frac{1}{2} [q] \cdot \sum_{e=1}^{NOE} [k]_e^* \cdot \{q\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [q] \cdot [K] \cdot \{q\}$$

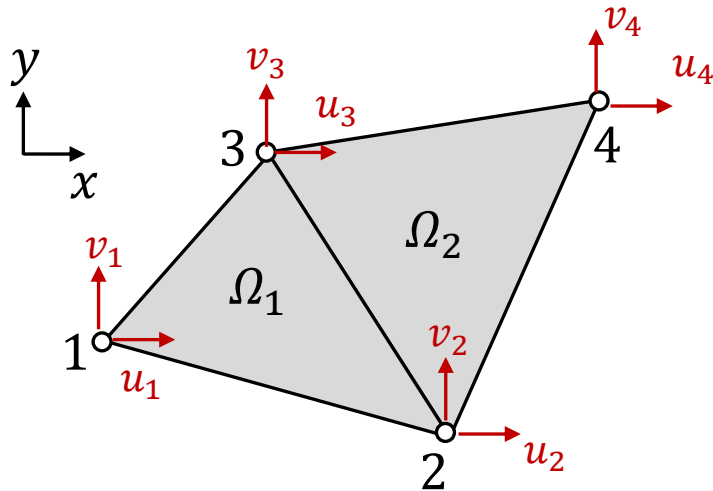
$1 \times NDOF \quad NDOF \times NDOF \quad NDOF \times 1$

globalna macierz sztywności:

$$[K] = \sum_{e=1}^{NOE} [k]_e^*$$

$NDOF \times NDOF$

# Przykład: globalna macierz sztywności modelu 2D o dwóch 3-węzłowych trójkątach



notacja globalna:

$$NOE = 2$$

$$NON = 4$$

$$n = 3$$

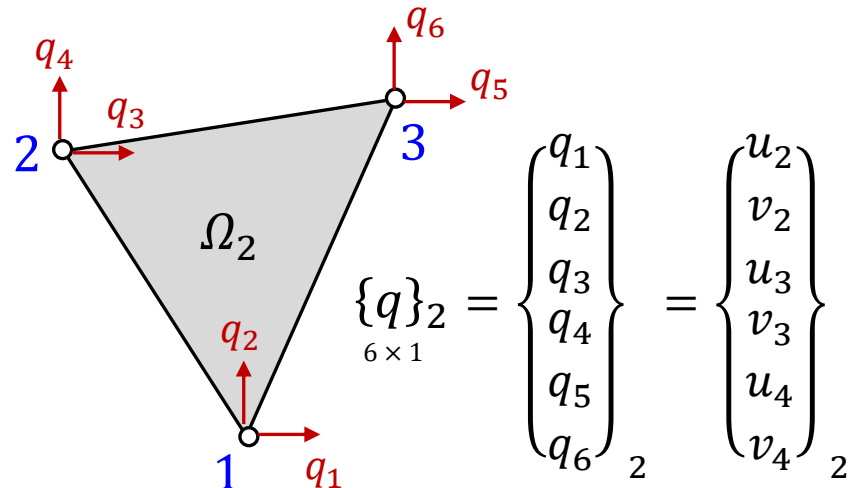
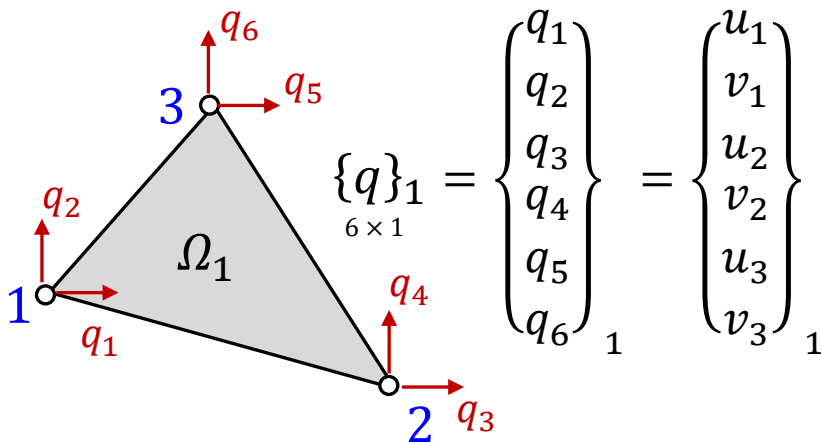
$$n_p = 2 \quad ; \quad (u, v)$$

$$n_e = n \cdot n_p = 6$$

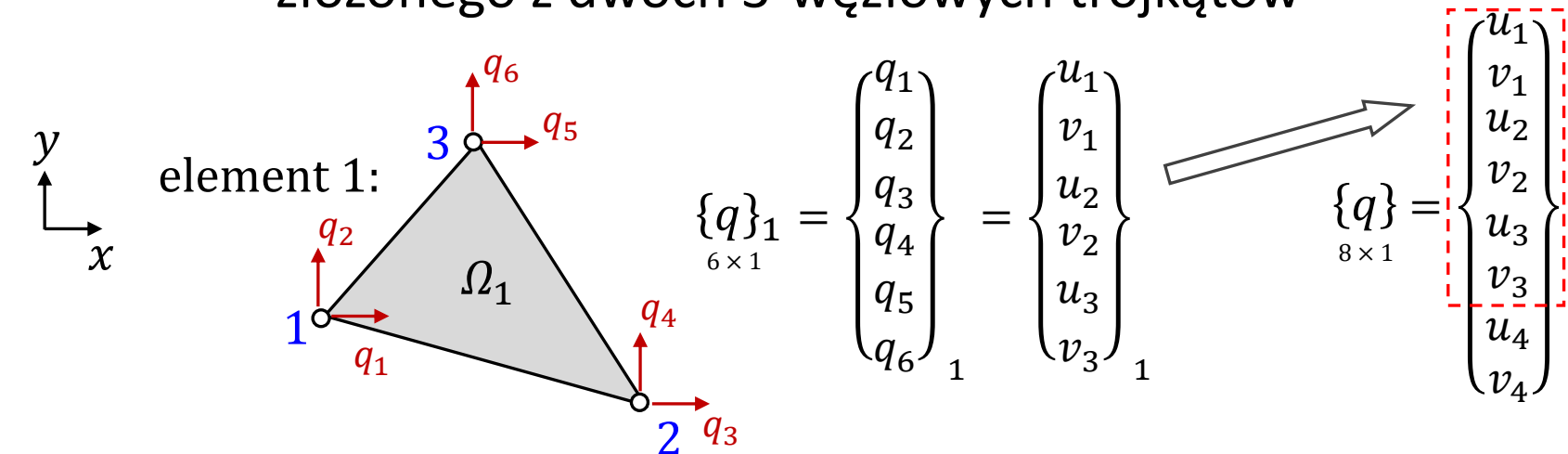
$$NDOF = NON \cdot n_p = 8$$

$$\{q\}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

notacja lokalna:



# Przykład: globalna macierz sztywności modelu 2D złożonego z dwóch 3-węzłowych trójkątów



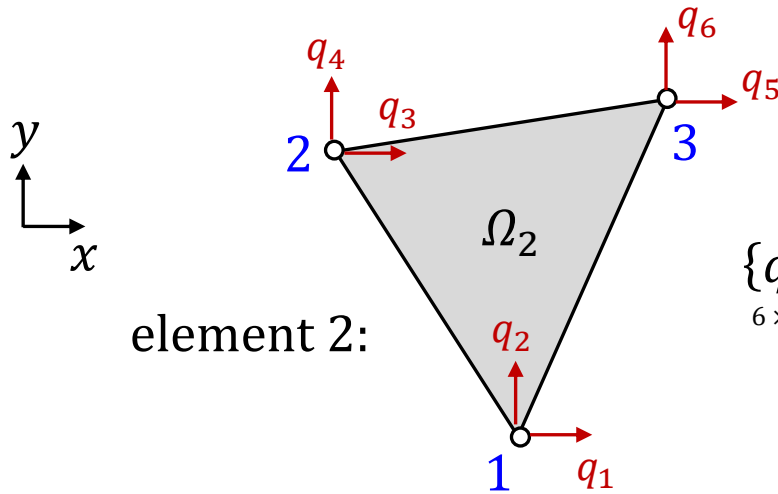
$$[k]_1^{6 \times 6} =$$

|   | 1     | 2     | 3     | 4     | 5           | 6           |
|---|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|
| 1 | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ | $e_1$       | $f_1$       |
| 2 | $b_1$ | $g_1$ | $h_1$ | $i_1$ | $j_1$       | $k_1$       |
| 3 | $c_1$ | $h_1$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$       | $o_1$       |
| 4 | $d_1$ | $i_1$ | $m_1$ | $p_1$ | $r_1$       | $s_1$       |
| 5 | $e_1$ | $j_1$ | $n_1$ | $r_1$ | $t_1$       | $\bar{u}_1$ |
| 6 | $f_1$ | $k_1$ | $o_1$ | $s_1$ | $\bar{u}_1$ | $\bar{w}_1$ |

$$[k]_1^{*8 \times 8} =$$

|   | 1     | 2     | 3     | 4     | 5           | 6           | 7 | 8 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|---|---|
| 1 | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ | $e_1$       | $f_1$       | 0 | 0 |
| 2 | $b_1$ | $g_1$ | $h_1$ | $i_1$ | $j_1$       | $k_1$       | 0 | 0 |
| 3 | $c_1$ | $h_1$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$       | $o_1$       | 0 | 0 |
| 4 | $d_1$ | $i_1$ | $m_1$ | $p_1$ | $r_1$       | $s_1$       | 0 | 0 |
| 5 | $e_1$ | $j_1$ | $n_1$ | $r_1$ | $t_1$       | $\bar{u}_1$ | 0 | 0 |
| 6 | $f_1$ | $k_1$ | $o_1$ | $s_1$ | $\bar{u}_1$ | $\bar{w}_1$ | 0 | 0 |
| 7 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0           | 0           | 0 | 0 |
| 8 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0           | 0           | 0 | 0 |

**Przykład:** globalna macierz sztywności modelu 2D  
złożonego z dwóch 3-węzłowych trójkątów

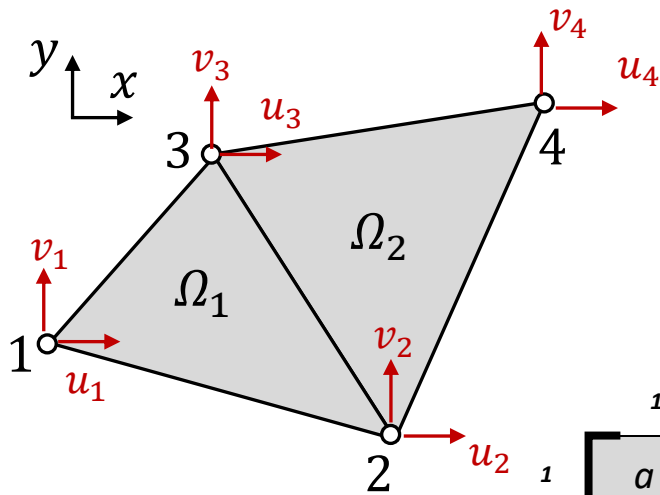


$$\{q\}_2^{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}_2 \xrightarrow{\quad} \{q\}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$[k]_2^{6 \times 6} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_2 & g_2 & h_2 & i_2 & j_2 & k_2 \\ c_2 & h_2 & l_2 & m_2 & n_2 & o_2 \\ d_2 & i_2 & m_2 & p_2 & r_2 & s_2 \\ e_2 & j_2 & n_2 & r_2 & t_2 & \bar{u}_2 \\ f_2 & k_2 & o_2 & s_2 & \bar{u}_2 & \bar{w}_2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k]_2^{*8 \times 8} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ 0 & 0 & b_2 & g_2 & h_2 & i_2 & j_2 & k_2 \\ 0 & 0 & c_2 & h_2 & l_2 & m_2 & n_2 & o_2 \\ 0 & 0 & d_2 & i_2 & m_2 & p_2 & r_2 & s_2 \\ 0 & 0 & e_2 & j_2 & n_2 & r_2 & t_2 & \bar{u}_2 \\ 0 & 0 & f_2 & k_2 & o_2 & s_2 & \bar{u}_2 & \bar{w}_2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

**Przykład:** globalna macierz sztywności modelu 2D  
złożonego z dwóch 3-węzłowych trójkątów



$$\{q\}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$[K]_{8 \times 8} = [k]_1^* + [k]_2^* =$$

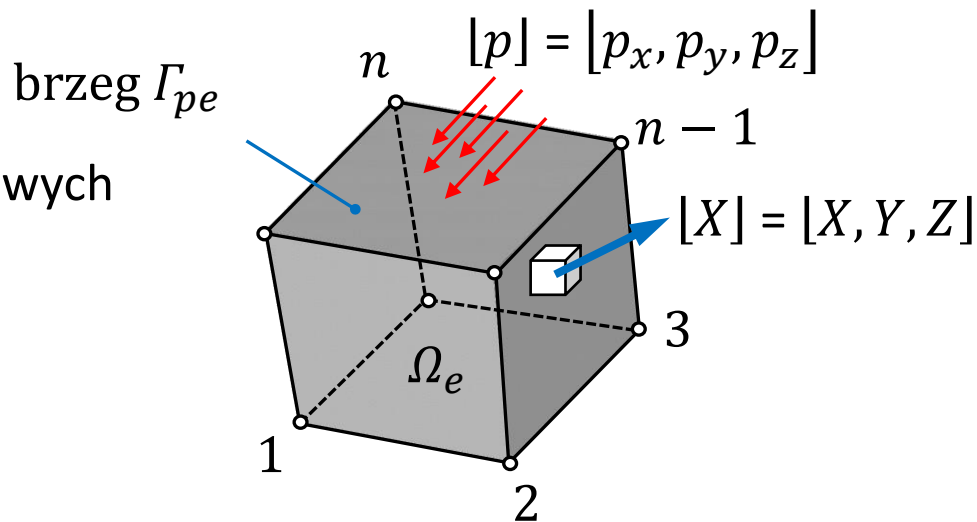
|   | 1     | 2     | 3           | 4           | 5                 | 6                 | 7           | 8           |
|---|-------|-------|-------------|-------------|-------------------|-------------------|-------------|-------------|
| 1 | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$       | $d_1$       | $e_1$             | $f_1$             | 0           | 0           |
| 2 | $b_1$ | $g_1$ | $h_1$       | $i_1$       | $j_1$             | $k_1$             | 0           | 0           |
| 3 | $c_1$ | $h_1$ | $l_1 + a_2$ | $m_1 + b_2$ | $n_1 + c_2$       | $o_1 + d_2$       | $e_2$       | $f_2$       |
| 4 | $d_1$ | $i_1$ | $m_1 + b_2$ | $p_1 + g_2$ | $r_1 + h_2$       | $s_1 + i_2$       | $j_2$       | $k_2$       |
| 5 | $e_1$ | $j_1$ | $n_1 + c_2$ | $r_1 + h_2$ | $t_1 + l_2$       | $\bar{u}_1 + m_2$ | $n_2$       | $o_2$       |
| 6 | $f_1$ | $k_1$ | $o_1 + d_2$ | $t_1 + l_2$ | $\bar{u}_1 + m_2$ | $\bar{w}_1 + p_2$ | $r_2$       | $s_2$       |
| 7 | 0     | 0     | $e_2$       | $j_2$       | $n_2$             | $r_2$             | $t_2$       | $\bar{u}_2$ |
| 8 | 0     | 0     | $f_2$       | $k_2$       | $o_2$             | $s_2$             | $\bar{u}_2$ | $\bar{w}_2$ |



## Energia potencjalna obciążenia w elemencie skończonym

$$\{q\}_e - \text{lokalny wektor param. w\u0119z\u0142owych}$$

Energia potencjalna obciążenia  
w elemencie skończonym:



$$W_e = \int_{\Omega_e} [X] \{u\} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{pe}} [p] \{u\} d\Gamma_{pe} = \int_{\Omega_e} [X] [N] \{q\}_e d\Omega_e + \int_{\Gamma_{pe}} [p] [N] \{q\}_e d\Gamma_{pe} =$$

$\{u\} = [N] \{q\}_e$   
 $\begin{matrix} 3 \times 1 & 3 \times n_e & n_e \times 1 \end{matrix}$

$$= \underbrace{\left(\int [X][N] d\Omega_e\right)}_{\substack{\Omega_e \quad 1 \times 3 \quad 3 \times n_e}} + \underbrace{\left(\int [p][N] d\Gamma_{pe}\right)}_{\substack{\Gamma_{pe} \quad 1 \times 3 \quad 3 \times n_e}} \underbrace{\{q\}_e}_{n_e \times 1} = \underbrace{([F^X]_e)}_{1 \times n_e} + \underbrace{([F^p]_e)}_{1 \times n_e} \underbrace{\{q\}_e}_{n_e \times 1} = \underbrace{[F]_e}_{1 \times n_e} \underbrace{\{q\}_e}_{n_e \times 1}$$

równoważny wektor obciążenia:

$$\underset{1 \times n_e}{[F]_e} = \underset{1 \times n_e}{[F^X]_e} + \underset{1 \times n_e}{[F^p]_e}$$

# Równoważny wektor obciążenia

$$\underset{1 \times n_e}{[F]}_e = \underset{1 \times n_e}{[F^X]}_e + \underset{1 \times n_e}{[F^p]}_e$$

równoważny wektor obciążenia od sił masowych:

$$\underset{1 \times n_e}{[F^X]}_e = \int_{\Omega_e} \underset{1 \times 3}{[X]} \underset{3 \times n_e}{[N]} d\Omega_e =$$

$$= \int_{\Omega_e} [X, Y, Z] \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} d\Omega_e$$

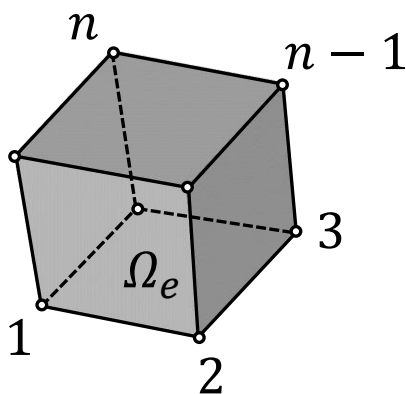
równoważny wektor obciążenia od obciążenia powierzchniowego:

$$\underset{1 \times n_e}{[F^p]}_e = \int_{\Gamma_{pe}} \underset{1 \times 3}{[p]} \underset{3 \times n_e}{[N]} d\Gamma_{pe} =$$

$$= \int_{\Gamma_{pe}} [p_x, p_y, p_z] \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} d\Gamma_{pe}$$

# Energia potencjalna obciążenia w elemencie skończonym

notacja lokalna:



$n$  – liczba węzłów w el.

$n_p$  – liczba param. węzłowych w węźle.

liczba parametrów węzłowych w el.:

$$n_e = n \cdot n_p$$

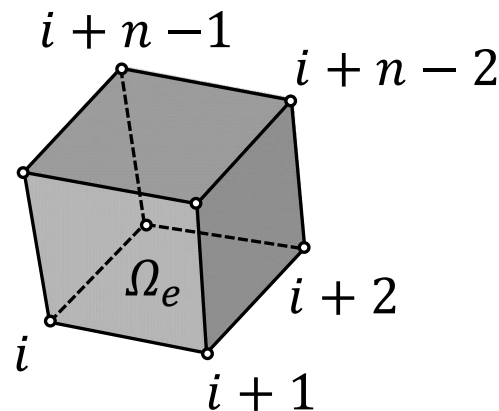
$\{q\}_e$  - lokalny wektor param. węzłowych  
 $n_e \times 1$

$$W_e = [q]_e \{F\}_e$$

$1 \times n_e \quad n_e \times 1$

↑  
równoważny wektor obciążenia

notacja globalna:



$NON$  – liczba węzłów

$n_p$  – liczba param. w węźle

liczba stopni swobody elementu:

$$NDOF = NON \cdot n_p$$

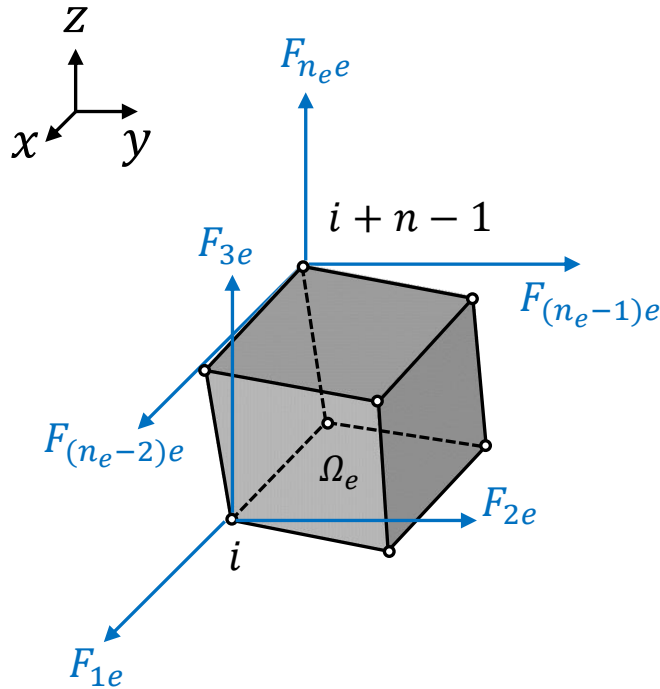
$\{q\}$  - globalny wektor param. węzłowych  
 $NDOF \times 1$

$$W_e = [q] \cdot \{F\}_e^*$$

$1 \times NDOF \quad NDOF \times 1$

↑  
rozszerzony równoważny wektor obc.

# Rozszerzony równoważny wektor obciążenia elementu skończonego



rozszerzony równoważny  
wektor obciążenia:

równoważny wektor  
obciążenia elementu:

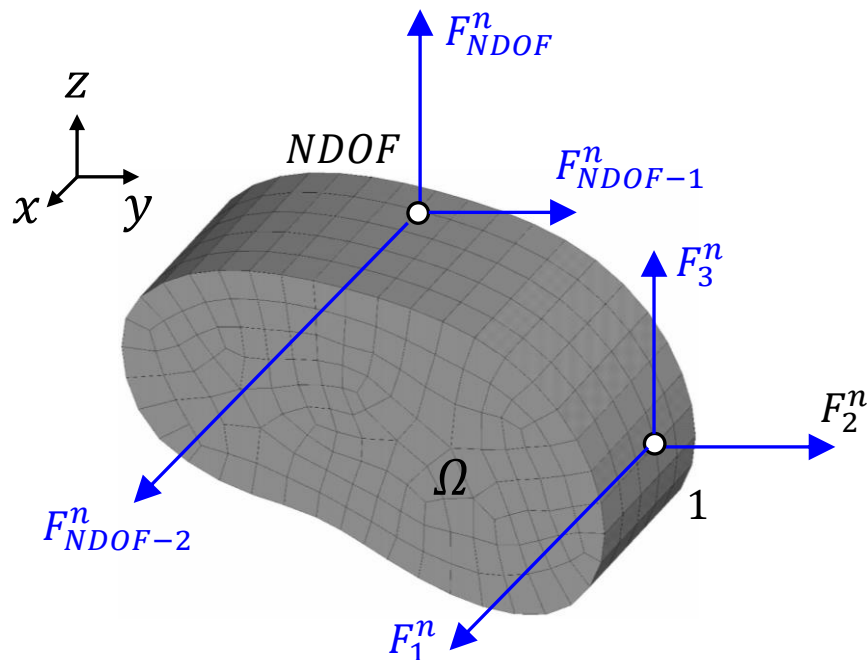
$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} F_{1e} \\ F_{2e} \\ F_{3e} \\ \dots \\ F_{(n_e-2)e} \\ F_{(n_e-1)e} \\ F_{n_e e} \end{Bmatrix}_{n_e \times 1}$$

$$\{F\}_e^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ F_{1e} \\ F_{2e} \\ \dots \\ F_{n_e e} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}_{NDOF \times 1}$$

$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ j-1 \\ j \\ j+1 \\ \dots \\ j+n_e-1 \\ j+n_e \\ \dots \\ NDOF \end{matrix}$

(założono, że numery węzłów  
w elemencie kolejno następują  
po sobie)

# Siły przykładane bezpośrednio na węzły. Energia potencjalna obciążeń węzłowych



wektor obciążeń węzłowych:

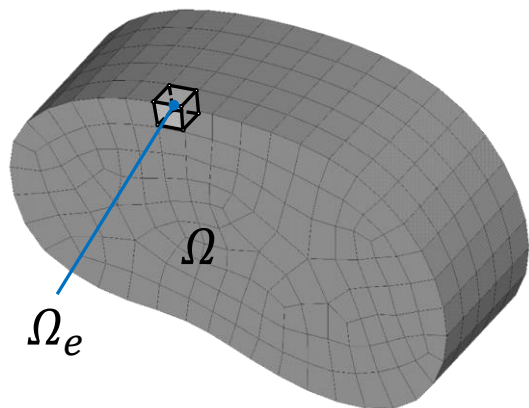
$$\{F\}_{NDOF \times 1}^n = \begin{Bmatrix} F_1^n \\ F_2^n \\ F_3^n \\ \dots \\ F_{NDOF-2}^n \\ F_{NDOF-1}^n \\ F_{NDOF}^n \end{Bmatrix}$$

energia potencjalna  
obciążeń węzłowych:

$$W^n = [q]_{1 \times NDOF} \cdot \{F\}_{NDOF \times 1}^n$$

# Energia potencjalna obciążenia w modelu MES.

## Globalny wektor obciążenia



$NOE$  – l. elementów  
 $NDOF$  – l. stopni swobody

energia potencjalna obciążeń elementów:

$$\Omega = \sum_{e=1}^{NOE} \Omega_e \rightarrow W^e = \sum_{e=1}^{NOE} W_e$$

energia potencjalna  
obciążeń węzłowych

energia potencjalna obciążenia w modelu MES:

$$W = W^e + W^n$$

$$W = \sum_{e=1}^{NOE} W_e + W^n = \sum_{e=1}^{NOE} [q]_{1 \times NDOF} \cdot \{F\}_e^*_{NDOF \times 1} + [q]_{1 \times NDOF} \cdot \{F\}^n_{NDOF \times 1} = [q]_{1 \times NDOF} \cdot \left( \sum_{e=1}^{NOE} \{F\}_e^*_{NDOF \times 1} + \{F\}^n_{NDOF \times 1} \right)$$

$$= [q]_{1 \times NDOF} \cdot (\{F\}^e_{NDOF \times 1} + \{F\}^n_{NDOF \times 1}) \rightarrow W = [q]_{1 \times NDOF} \cdot \{F\}_{NDOF \times 1}$$

globalny wektor  
obciążeń elementów

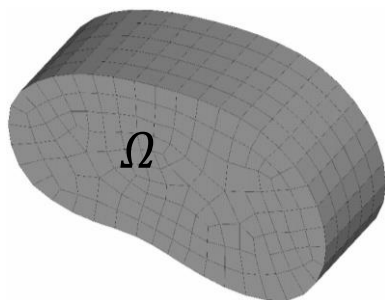
wektor obciążeń  
węzłowych

globalny wektor  
obciążenia:

$$\{F\}_{NDOF \times 1} = \{F\}^e_{NDOF \times 1} + \{F\}^n_{NDOF \times 1}$$

# Całkowita energia potencjalna w modelu MES.

## Układ równań liniowych



Całkowita energia potencjalna modelu:

$$V = U - W = \frac{1}{2} \cdot \underset{1 \times NDOF}{[q]} \cdot \underset{NDOF \times NDOF}{[K]} \cdot \underset{NDOF \times 1}{\{q\}} - \underset{1 \times NDOF}{[q]} \cdot \underset{NDOF \times 1}{\{F\}}$$

$$\underset{NDOF \times 1}{\{q\}} = ?$$

$NOE$  – liczba elementów

$NDOF$  – liczba stopni swobody

$$V \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \rightarrow$$

$$\underset{NDOF \times NDOF}{[K]} \cdot \underset{NDOF \times 1}{\{q\}} = \underset{NDOF \times 1}{\{F\}}$$



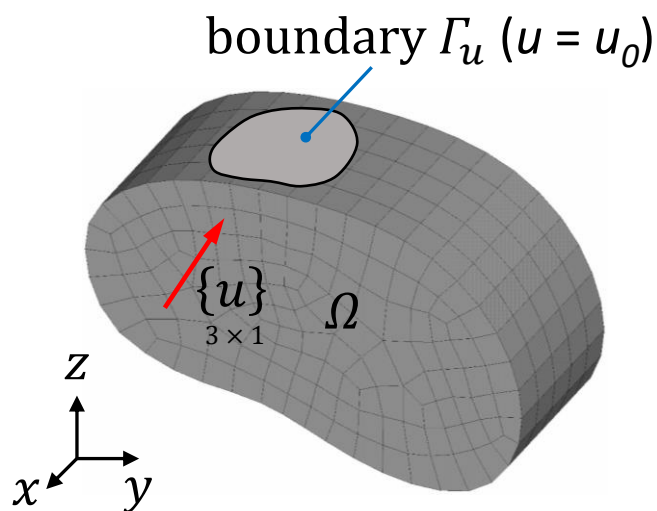
układ równań algebraicznych liniowych

$$\underset{NDOF \times NDOF}{\det ([K])} = 0$$



# Układ równań MES z warunkami brzegowymi

Pole przemieszczeń  $\{u\}$  które przedstawia rozwiązanie problemu **spełnia przemieszczeniowe warunki brzegowe na  $\Gamma_u$**  i minimalizuje całkowitą energię potencjalną  $V$ .



$NDOF$  – liczba stopni swobody

$NOF$  – liczba znanych stopni swobody na  $\Gamma_u$

$N$  – liczba nieznanych stopni swobody:

$$N = NDOF - NOF$$

$$\begin{matrix} [K] & \rightarrow & [K] & ; & \{q\} & \rightarrow & \{q\} & ; & \{F\} & \rightarrow & \{F\} \\ NDOF \times NDOF & & N \times N & & NDOF \times 1 & & N \times 1 & & NDOF \times 1 & & N \times 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} [K] \cdot \{q\} = \{F\} \\ N \times N \quad N \times 1 \quad N \times 1 \end{matrix}$$

$$\det ([K]) \neq 0$$

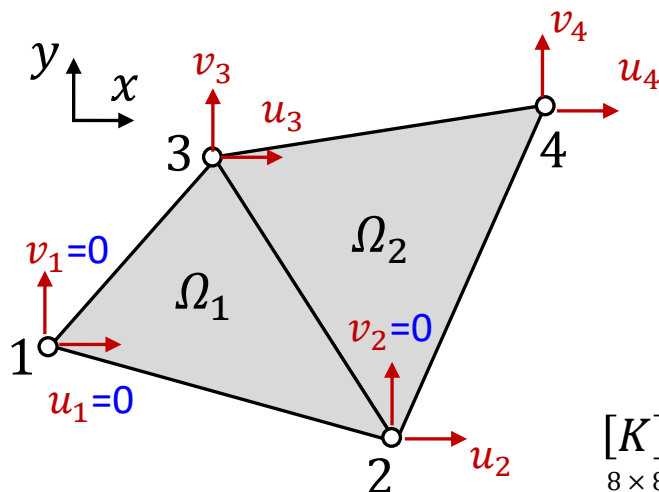
$N \times N$

liniowy układ równań algebraicznych z warunkami brzegowymi



# Przykład. Warunki brzegowe w zadaniu 2D.

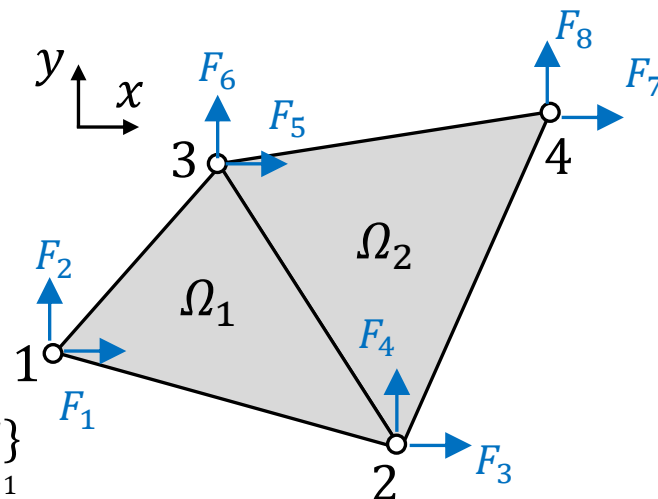
Model MES złożony z dwóch 3-węzłowych trójkątów



$NDOF = 8$

$NOF = 3$

$$[K]_{8 \times 8} \cdot \{q\}_{8 \times 1} = \{F\}_{8 \times 1}$$

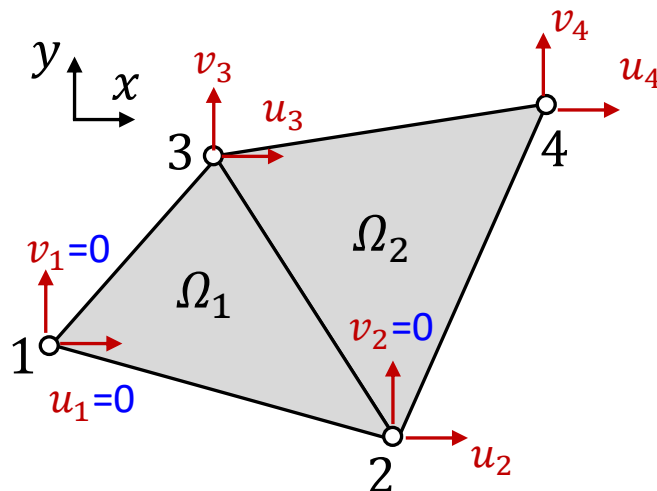


|   | 1     | 2     | 3           | 4           | 5                 | 6                 | 7           | 8           |
|---|-------|-------|-------------|-------------|-------------------|-------------------|-------------|-------------|
| 1 | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$       | $d_1$       | $e_1$             | $f_1$             | 0           | 0           |
| 2 | $b_1$ | $g_1$ | $h_1$       | $i_1$       | $j_1$             | $k_1$             | 0           | 0           |
| 3 | $c_1$ | $h_1$ | $l_1 + a_2$ | $m_1 + b_2$ | $n_1 + c_2$       | $o_1 + d_2$       | $e_2$       | $f_2$       |
| 4 | $d_1$ | $i_1$ | $m_1 + b_2$ | $p_1 + g_2$ | $r_1 + h_2$       | $s_1 + i_2$       | $j_2$       | $k_2$       |
| 5 | $e_1$ | $j_1$ | $n_1 + c_2$ | $r_1 + h_2$ | $t_1 + l_2$       | $\bar{u}_1 + m_2$ | $n_2$       | $o_2$       |
| 6 | $f_1$ | $k_1$ | $o_1 + d_2$ | $t_1 + l_2$ | $\bar{u}_1 + m_2$ | $\bar{w}_1 + p_2$ | $r_2$       | $s_2$       |
| 7 | 0     | 0     | $e_2$       | $j_2$       | $n_2$             | $r_2$             | $t_2$       | $\bar{u}_2$ |
| 8 | 0     | 0     | $f_2$       | $k_2$       | $o_2$             | $s_2$             | $\bar{u}_2$ | $\bar{w}_2$ |

$$\begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix}$$

# Przykład. Warunki brzegowe w zadaniu 2D.

Model MES złożony z dwóch 3-węzłowych trójkątów



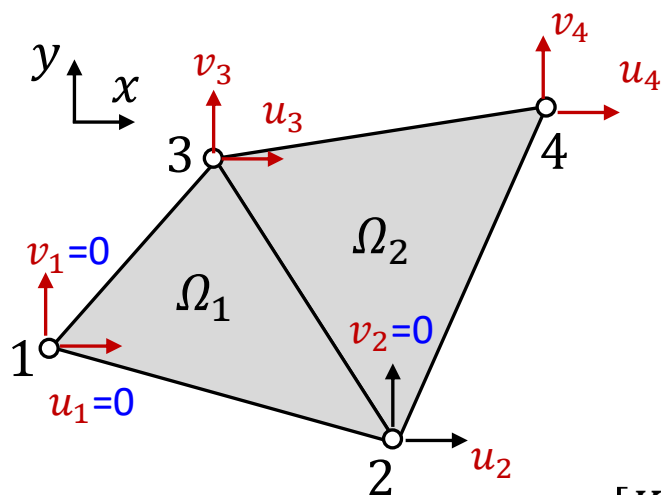
$$\underset{8 \times 8}{[K]} \cdot \underset{8 \times 1}{\{q\}} = \underset{8 \times 1}{\{F\}}$$

|   | 1     | 2     | 3         | 4         | 5               | 6               | 7           | 8           |
|---|-------|-------|-----------|-----------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|
| 1 | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$     | $d_1$     | $e_1$           | $f_1$           | 0           | 0           |
| 2 | $b_1$ | $g_1$ | $h_1$     | $i_1$     | $j_1$           | $k_1$           | 0           | 0           |
| 3 | $c_1$ | $h_1$ | $l_1+a_2$ | $m_1+b_2$ | $n_1+c_2$       | $o_1+d_2$       | $e_2$       | $f_2$       |
| 4 | $d_1$ | $i_1$ | $m_1+b_2$ | $p_1+g_2$ | $r_1+h_2$       | $s_1+i_2$       | $j_2$       | $k_2$       |
| 5 | $e_1$ | $j_1$ | $n_1+c_2$ | $r_1+h_2$ | $t_1+l_2$       | $\bar{u}_1+m_2$ | $n_2$       | $o_2$       |
| 6 | $f_1$ | $k_1$ | $o_1+d_2$ | $t_1+l_2$ | $\bar{u}_1+m_2$ | $\bar{w}_1+p_2$ | $r_2$       | $s_2$       |
| 7 | 0     | 0     | $e_2$     | $j_2$     | $n_2$           | $r_2$           | $t_2$       | $\bar{u}_2$ |
| 8 | 0     | 0     | $f_2$     | $k_2$     | $o_2$           | $s_2$           | $\bar{u}_2$ | $\bar{w}_2$ |

$$\begin{Bmatrix} u_1=0 \\ v_1=0 \\ u_2 \\ v_2=0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix}$$

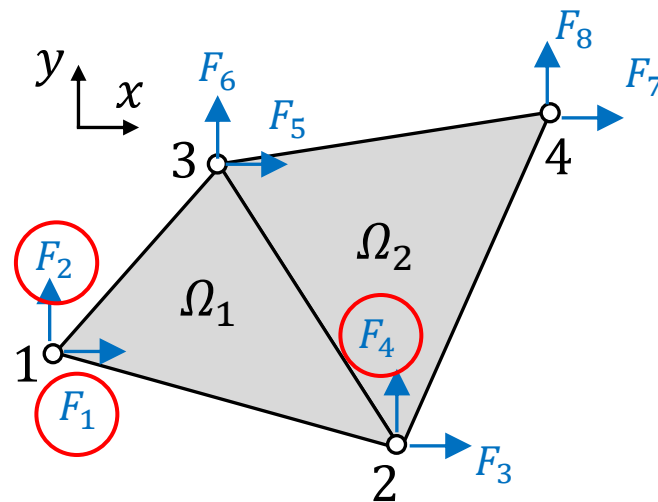
# Przykład. Warunki brzegowe w zadaniu 2D.

Model MES złożony z dwóch 3-węzłowych trójkątów



$$N = 8 - 3 = 5$$

$$\underset{5 \times 5}{[K]} \cdot \underset{5 \times 1}{\{q\}} = \underset{5 \times 1}{\{F\}}$$



|             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $l_1 + a_2$ | $n_1 + c_2$ | $o_1 + d_2$ | $e_2$       | $f_2$       |
| $n_1 + c_2$ | $t_1 + l_2$ | $u_1 + m_2$ | $n_2$       | $o_2$       |
| $o_1 + d_2$ | $u_1 + m_2$ | $w_1 + p_2$ | $r_2$       | $s_2$       |
| $e_2$       | $n_2$       | $r_2$       | $t_2$       | $\bar{u}_2$ |
| $f_2$       | $o_2$       | $s_2$       | $\bar{u}_2$ | $\bar{w}_2$ |

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix}$$

↑

liniowy układ równań algebraicznych z warunkami brzegowymi

# Rozwiązanie układu równań MES z warunkami brzegowymi

$$\underset{N \times N}{[K]} \cdot \underset{N \times 1}{\{q\}} = \underset{N \times 1}{\{F\}} \quad \rightarrow \quad \underset{N \times N}{\det ([K])} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \underset{N \times 1}{\{q\}} = \underset{N \times N}{[K]}^{-1} \underset{N \times 1}{\{F\}}$$

wyniki w węzłach:  $\{q\}$   
 $NDOF \times 1$

wyniki w elementach (ES):

$$\underset{6 \times 1}{\{\varepsilon\}} = \underset{6 \times n_e}{[B]} \underset{n_e \times 1}{\{q\}_e} \quad ; \quad \underset{6 \times 1}{\{\sigma\}} = \underset{6 \times 6}{[D]} \underset{6 \times 1}{\{\varepsilon\}} = \underset{6 \times 6}{[D]} \underset{6 \times n_e}{[B]} \underset{n_e \times 1}{\{q\}_e}$$

↑  
 odkształcenia w elemencie skończonym

↑  
 naprężenie w elemencie skończonym

Rozwiązania węzłowe (NS):

$$(NS)_i = \frac{\sum_{e=1}^k (ES)_{ei}}{k}$$

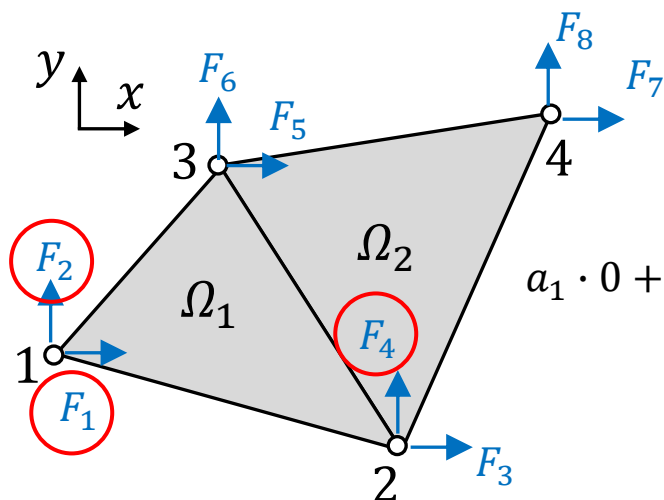
$(NS)_i$  – uśrednione wyniki węzłowe w węźle (i)

$(ES)_{ei}$  – wynik elementu (e) w węźle (i)

k – liczba elementów sąsiadujących z węzłem (i)

# Przykład. Reakcje wyliczone w zadaniu 2D.

Model MES złożony z dwóch 3-węzłowych trójkątów



$$[K] \cdot \{q\} = \{F\}$$

$8 \times 8$        $8 \times 1$        $8 \times 1$

$\uparrow$   
*znane*

$$\boxed{\phantom{0000}} \cdot \boxed{\phantom{0000}} = F_1$$

$$a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot u_2 + d_1 \cdot 0 + e_1 \cdot u_3 + f_1 \cdot v_3 + 0 \cdot u_4 + 0 \cdot v_4 = F_1$$

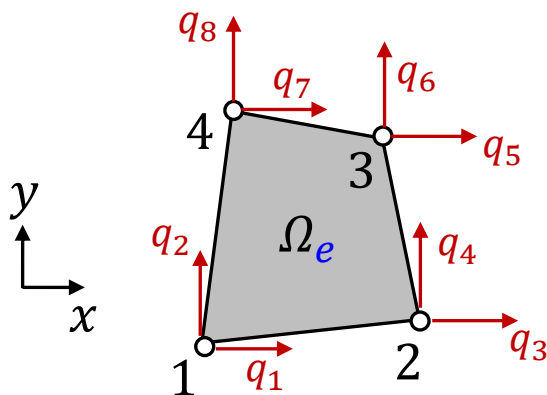
$$\boxed{\phantom{0000}} \cdot \boxed{\phantom{0000}} = F_2 \quad ; \quad \boxed{\phantom{0000}} \cdot \boxed{\phantom{0000}} = F_4$$

|   | 1     | 2     | 3           | 4           | 5                 | 6                 | 7           | 8           |
|---|-------|-------|-------------|-------------|-------------------|-------------------|-------------|-------------|
| 1 | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$       | $d_1$       | $e_1$             | $f_1$             | 0           | 0           |
| 2 | $b_1$ | $g_1$ | $h_1$       | $i_1$       | $j_1$             | $k_1$             | 0           | 0           |
| 3 | $c_1$ | $h_1$ | $l_1 + a_2$ | $m_1 + b_2$ | $n_1 + c_2$       | $o_1 + d_2$       | $e_2$       | $f_2$       |
| 4 | $d_1$ | $i_1$ | $m_1 + b_2$ | $p_1 + g_2$ | $r_1 + h_2$       | $s_1 + i_2$       | $j_2$       | $k_2$       |
| 5 | $e_1$ | $j_1$ | $n_1 + c_2$ | $r_1 + h_2$ | $t_1 + l_2$       | $\bar{u}_1 + m_2$ | $n_2$       | $o_2$       |
| 6 | $f_1$ | $k_1$ | $o_1 + d_2$ | $t_1 + l_2$ | $\bar{u}_1 + m_2$ | $\bar{w}_1 + p_2$ | $r_2$       | $s_2$       |
| 7 | 0     | 0     | $e_2$       | $j_2$       | $n_2$             | $r_2$             | $t_2$       | $\bar{u}_2$ |
| 8 | 0     | 0     | $f_2$       | $k_2$       | $o_2$             | $s_2$             | $\bar{u}_2$ | $\bar{w}_2$ |

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{array} \right\}$$

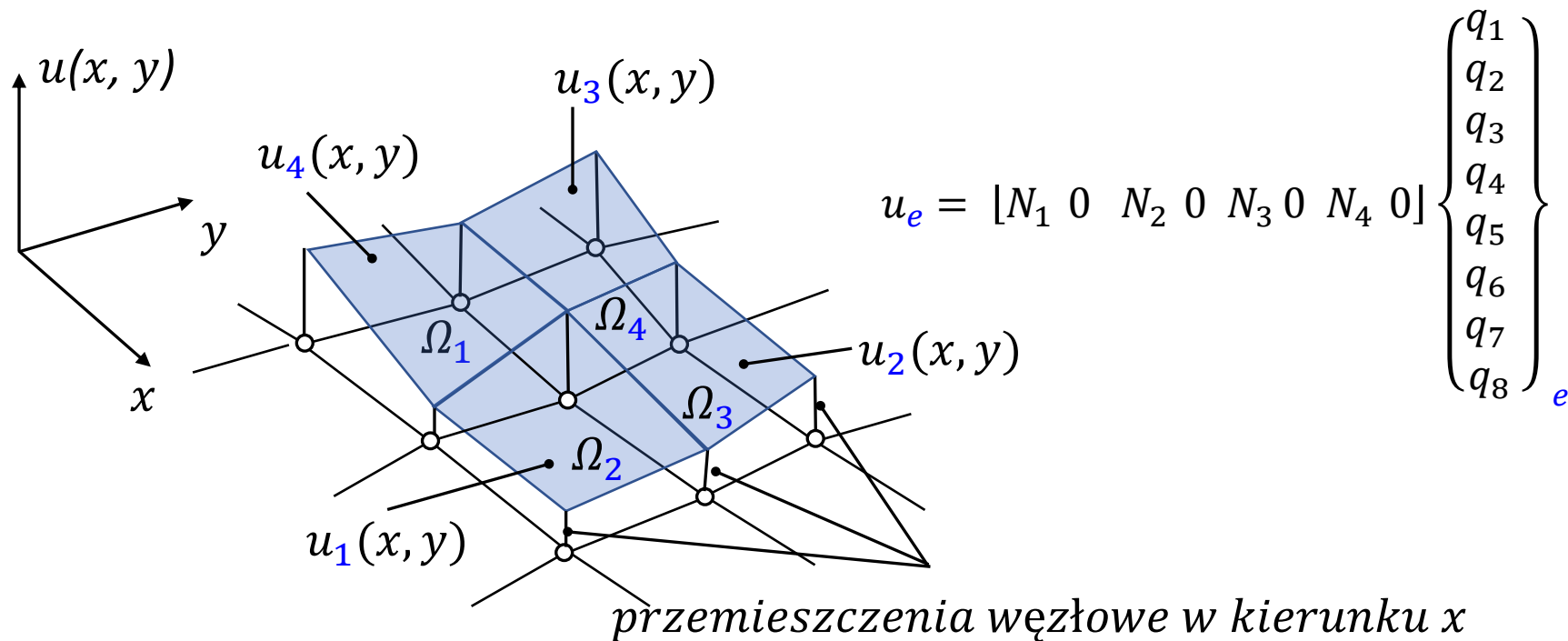
## Przykład. Rozwiązanie $u(x,y)$ w zadaniu 2D.

Model MES złożony z 4-węzłowych elementów czworokątnych



$$\{u\}_{2 \times 1} = [N]_{2 \times 8} \{q\}_{8 \times 1}_e$$

$u_e(x, y)$  – przemieszczenie w kierunku  $x$

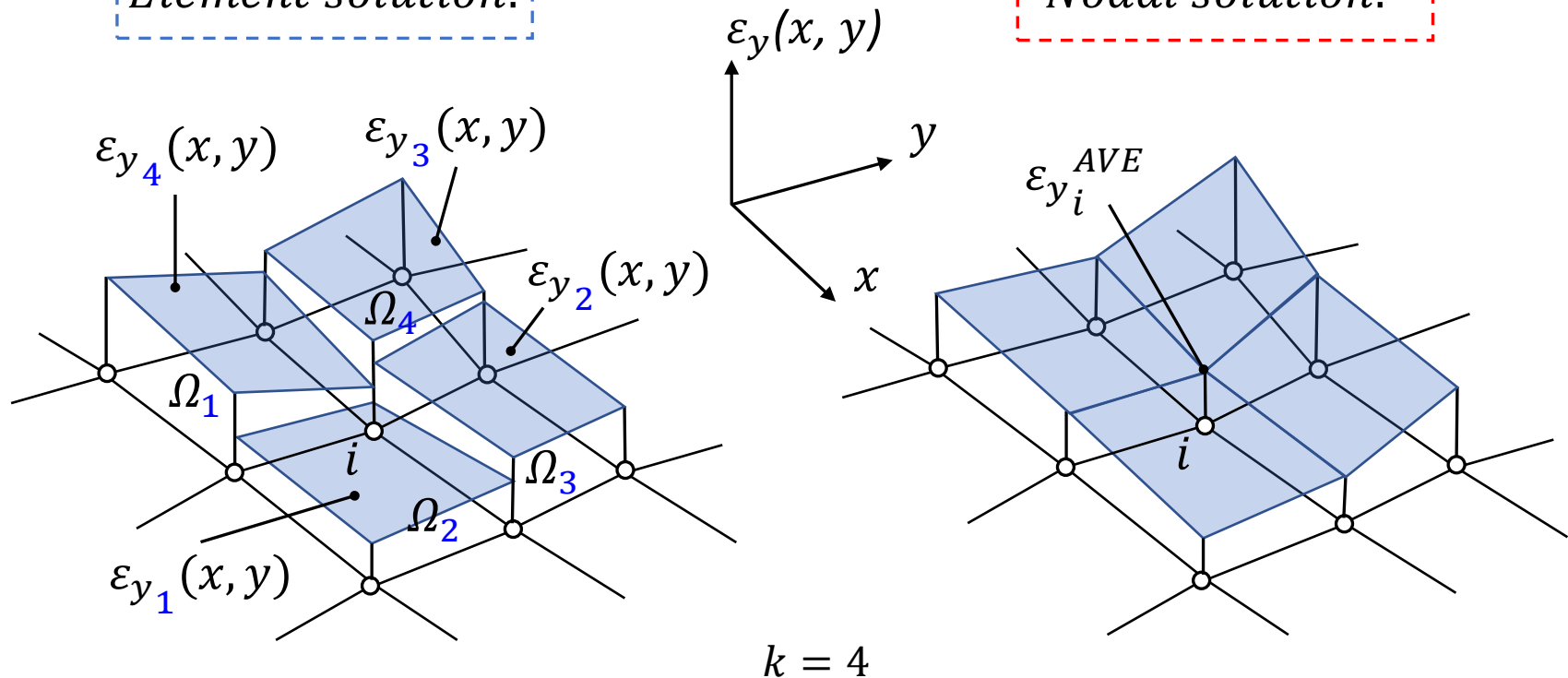


# Przykład. Składowe odkształcenia $\varepsilon_y(x, y)$ w zadaniu 2D.

Model MES złożony z 4-węzłowych elementów czworokątnych

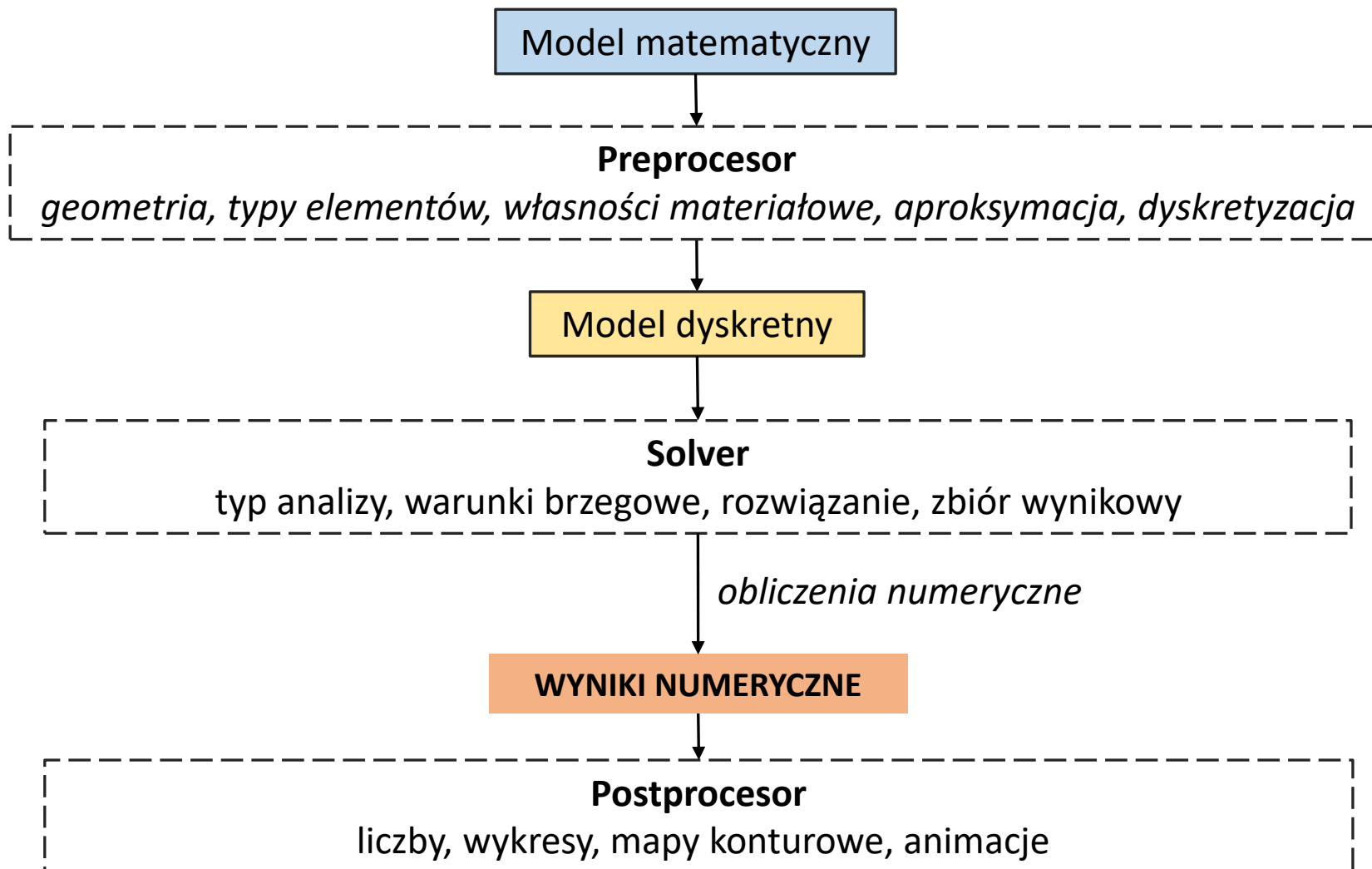
*Element solution:*

*Nodal solution:*



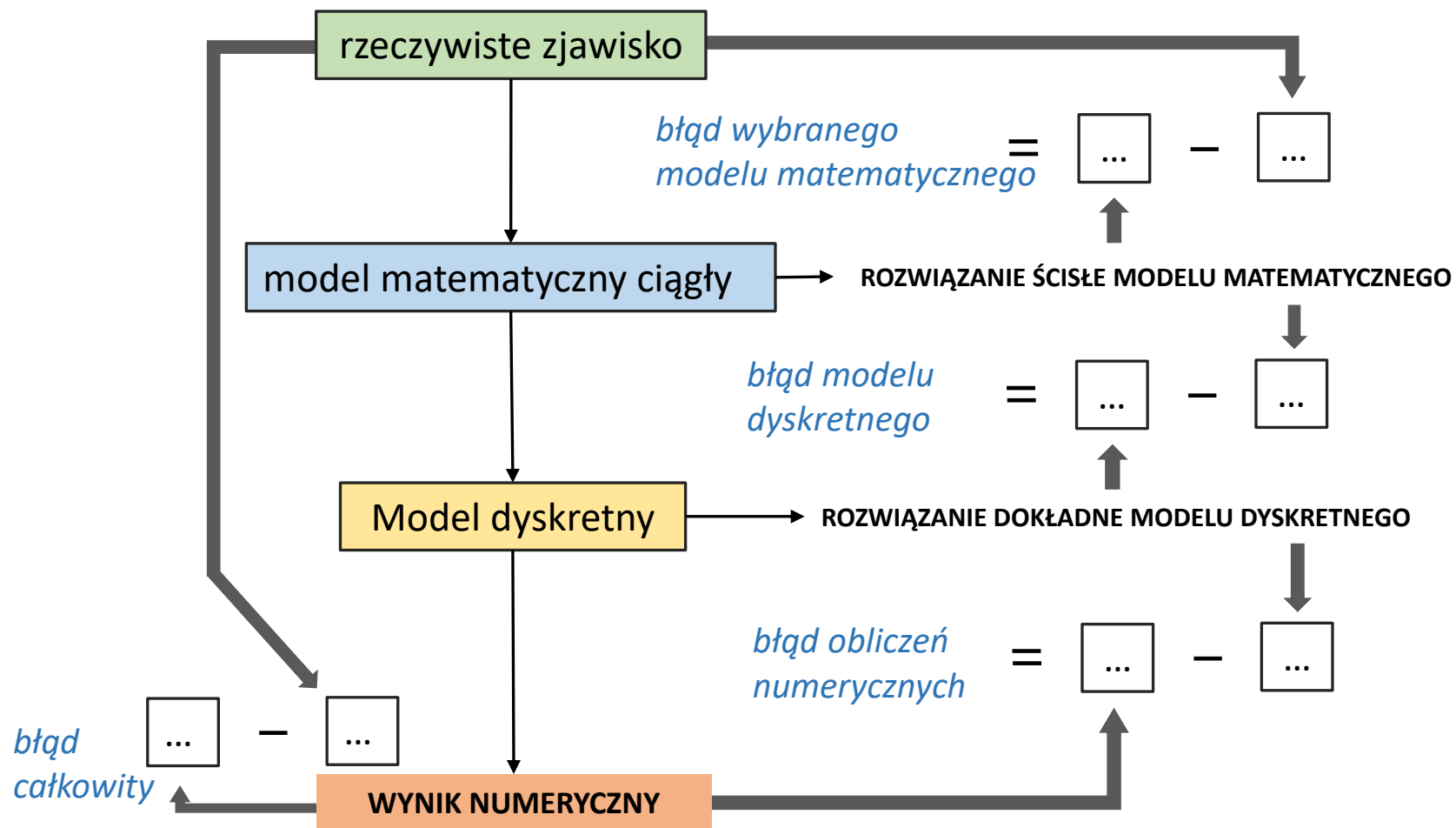
$$\varepsilon_{y_i}^{AVE} = \frac{\varepsilon_{y_1}(x_i, y_i) + \varepsilon_{y_2}(x_i, y_i) + \varepsilon_{y_3}(x_i, y_i) + \varepsilon_{y_4}(x_i, y_i)}{4}$$

# Modelowanie MES – główne kroki





# Dokładność obliczeń MES



$\text{błąd całkowity} = \text{bł. wybranego modelu mat.} + \text{bł. modelu dyskretnego} + \text{bł. obliczeń numerycznych}$

$\text{bł. wybranego modelu mat.} \approx \text{bł. modelu dyskretnego} \approx \text{bł. obliczeń numerycznych} \rightarrow \min$